

# Иррациональные и рациональные числа

03 июля

1. Докажите иррациональность чисел: **(а)**  $\sqrt[3]{3}$ , **(б)**  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ , **(в)**  $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4}$ .
2. Олег нарисовал пустую таблицу  $50 \times 50$  и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица умножения»). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами?
3. Пусть  $\alpha$  — такое действительное число, что числа  $\alpha^2 + \alpha$  и  $\alpha^3 + 2\alpha$  — рациональные. Докажите, что  $\alpha$  тоже рационально.
4. Есть 100 вещественных чисел  $a_1, \dots, a_{100}$ . Докажите, что найдётся такое вещественное  $b$ , что все числа  $a_i + b$  иррациональны.
5. Числа  $x, y$  и  $z$  таковы, что все три числа  $x + yz$ ,  $y + zx$  и  $z + xy$  рациональны, а  $x^2 + y^2 = 1$ . Докажите, что число  $xyz^2$  также рационально.
6. Иррациональный взрыв с эпицентром в точке  $P$  удаляет из плоскости все точки, находящиеся на иррациональном расстоянии от точки  $P$ . Какое наименьшее количество иррациональных взрывов достаточно для того, чтобы удалить из плоскости все точки?
7. На доске написаны несколько различных чисел. Известно, что сумма любых трёх написанных чисел рациональна, а сумма любых двух написанных чисел — иррациональна. Какое наибольшее количество чисел может быть написано на доске?
8. Про ненулевые числа  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  известно, что для любых  $i \neq j$  хотя бы одно из чисел  $a_i + a_j$  или  $a_i a_j$  рационально. Докажите, что квадраты этих чисел — рациональные числа.